Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2019-20

PROFESOR: Davide Barbieri

1.- TÍTULO: Synchrosqueezing (Intentando engañar al principio de incertidumbre).

Resumen/contenido:

Cuando escuchamos una orquesta, nuestro oído es capaz no sólo de identificar las notas tocadas en cada instante, sino que también puede distinguir los varios instrumentos. Y lo hace con grande precisión. Por otro lado, el principio de incertidumbre para la transformada de Fourier nos dice que es imposible medir con precisión infinita tanto el instante en él que aparece una vibración como la frecuencia de tal vibración. Para mejorar la resolución proporcionada por el análisis lineal tiempo-frecuencia y tiempo-escala, en años recientes se han ido desarrollando técnicas no lineales para el análisis de las señales, inspiradas en el oído humano, como el "synchrosqueezing".

Bibliografía/referencias:

F. Auger, P. Flandrin et al. A Coherent Overview of Time-Frequency Reassignment and Synchrosqueezing. IEEE Signal Processing Magazine 30 (2013), pp. 32-41.

I. Daubechies, J. Lu, H-T. Wu. Synchrosqueezed wavelet transforms. Appl. Comput. Harmon. Anal. 30 (2011), pp. 243-261.

H.-T. Wu, P. Flandrin, I. Daubechies. One or two frequencies? The synchro-squeezing answer. Advances in Adaptive Data Analysis 3 (2011), pp. 29-39.

2.- TÍTULO: Cuantización geométrica y ecuivalencia de Morita.

Resumen/contenido:

La presencia de simetrías o restricciones sobre una variedad simpléctica puede dar lugar a subvariedades simplécticas relevantes para el estudio de sistemas físicos clásicos. Una aplicación de la téoria de reducción simpléctica a la mecánica hamiltoniana es dada por un teorema de E. Noether, que se encuentra a la base de la teoría de los llamados sistemas integrables. El teorema de imprimitividad clásico caracteriza los sistemas que tienen la misma reducibilidad, en términos de la llamada ecuivalencia de Morita. Esta idea de reducción se puede trasladar a sistemas cuánticos, en los que el álgebra de Poisson clásica de las funciones suaves es remplazada por álgebras no conmutativas de operadores asociados a estados de un sistema físico. En este caso, la estructura matemática de la ecuivalencia de Morita se expresa en términos de una ecuivalencia de módulos sobre espacios de operadores, y el procedimiento de reducción simpléctica se formaliza en términos de una generalización del procedimiento de inducción para representaciones de grupos. El objetivo de este trabajo es estudiar la estructura de esta teoría, y las demostraciones de algunos resultados especialmente relevantes.

Bibliografía/referencias:

S. Gutt, J. Rawnsley, D. Sternheimer (eds.). Poisson geometry, deformation quantisation and group representations. Cambridge University Press, 2005.

N. P. Landsman. Mathematical topics between classical and quantum mechanics. Springer, 1998.

I. Raeburn, D. P. Williams. Morita equivalence and continuous-trace C*-algebras. AMS 1998.

3.- TÍTULO: Distribuciones asimétricas de riqueza.

Resumen/contenido:

La distribución de la riqueza de una población tiene una invariancia de escala que se observa empiricamente desde finales del siglo XIX, a partir del trabajo del economista V. Pareto. Este fenómeno ha sido popularizado como ley del 80-20: el 20% de la población tiene el 80% de la riqueza y, en este subconjunto, otra vez el 20% de la población controla el 80% de la riqueza... B. Mandelbrot, a mediados del siglo XX, ha puesto en relación estas "distribuciones de Pareto" con una generalización del teorema del límite central para variables aleatorias con varianza infinita, con convergencia en la clase Lévy-estable. En años recientes, el acceso a grandes bases de datos ha permitido a economistas como T. Piketty de estimar cuantitativamente estas distribuciones en distintas economías. Para estudiar la evolución de estas distribuciones, varios modelos estocásticos de la dinámica de acumulación de la riqueza han sido propuestos por matemáticos como P.-L. Lions. El objetivo de este trabajo es estudiar las bases matemáticas de las distribuciones de Pareto y de su evolución, y las principales aplicaciones.

Bibliografía/referencias:

B. C. Arnold. Pareto distributions. CRC Press, 2nd ed. 2015.

X. Gabaix, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, B. Moll. The Dynamics of Inequality. Econometrica 84 (2016), pp. 2071-2111.

C. I. Jones. Pareto and Piketty: The Macroeconomics of Top Income and Wealth Inequality. Journal of Economic Perspectives 29 (2015), pp. 29-46.

B. Mandelbrot. The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income. International Economic Review 1 (1960), pp. 79-106.

G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu. Stable non-Gaussian random processes. CRC 1994.

World Inequality Database. https://wid.world/world-inequality-lab/

4.- TÍTULO: Subvariedades reales en espacios complejos y el grupo de Heisenberg.

Resumen/contenido:

Los campos vectoriales complejos tangentes a una subvariedad de $\mathbf{C}^n$ definida por ecuaciones reales permiten definir unas condiciones de regularidad compleja - que se corresponden con la restricción a la variedad de las condiciones de Cauchy-Riemann del espacio ambiente - que generalizan la holomorfía. Las funciones que las satisfacen se llaman funciones CR. El objetivo de este trabajo es el estudio de las características básicas de las funciones CR, y de un ejemplo concreto de variedad dado por el borde del llamado dominio de Siegel, cuyo grupo de automorfismos es conocido como grupo de Heisenberg. En este caso, se podrá observar una relación entre funciones CR y el principio de incertidumbre.

Bibliografía/referencias:

M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild. Real submanifolds in complex space and their mappings. Princeton University Press, 1999.

E. M. Stein. Harmonic analysis. Real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton University Press, 1993.

5.- TÍTULO: Aproximación semiclásica de la dinámica cuántica.

Resumen/contenido:

La descripción clásica de la evolución de un sistema físico es dada por la ley de Newton F=ma. Este sistema de ecuaciones ordinarias es ecuivalente a un problema geodésico, y su solución corresponde a la solución de una ecuación no lineal real en derivadas parciales, llamada ecuación de Hamilton-Jacobi, para la métrica (acción). Por otro lado, la descripción cuántica de la evolución del mismo sistema es dada por una ecuación lineal compleja en derivadas parciales, llamada ecuación de Schrödinger, que no proporciona trajectorias ni métricas sino distribuciones de probabilidad. La pregunta si la mecánica cuántica es una generalización de la mecánica clasica se puede formular de la siguiente manera. ¿Es posible obtener la evolución clásica a partir de la ecuación de Schrödinger? El objetivo de este trabajo es estudiar este problema, y la respuesta dada por el método de aproximación WKB, que prueba que la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi aproxima a la fase de la solución a la ecuación de Schrödinger.

Bibliografía/referencias:

V. I. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics. Springer, 2nd ed. 1989.

B. C. Hall. Quantum theory for mathematicians. Springer, 2013.

V. P. Maslov. The complex WKB method for nonlinear equations. Springer, 1994.

G. Vilasi. Hamiltonian mechanics. World Scientific, 2001.

6.- TÍTULO: Difusión en grafos, desigualdad isoperimetrica de Cheeger y Google PageRank

Resumen/contenido:

Dado un grafo pesado, o sea en él que cada arista puede tener un valor de conectividad distinto, cuales aristas es mejor cortar para obtener una partición en dos subgrafos de manera que la conectividad perdida sea mínima? Este problema, llamado a veces “corte de Cheeger”, es computacionalmente duro, pero tiene muchas importantes aplicaciones, como la segmentación de imagenes, el algoritmo de Google para clasificar el web y el aprendizaje automático de variedades. Su solución aproximada se puede obtener gracias a técnicas de análisis armónico: el estudio de las propiedades espectrales del Laplaciano del grafo, o el estudio de las propiedades de difusión de los caminos aleatorios sobre el grafo. Esto se debe a una desigualdad introducida por J. Cheeger inicialmente para ciertas variedades diferenciables, y relacionada con el problema isoperimetrico. El objetivo de este trabajo es estudiar la desigualdad de Cheeger, su relación con el problema del corte óptimo de grafos, y algunas de sus aplicaciones, con la posibilidad de implementar algoritmos de agrupamiento basados en estas técnicas.

Bibliografía/referencias:

A. E. Brouwer, W. H. Haemers. Spectra of graphs. Springer, 2012.

F. R. K. Chung. Spectral graph theory. AMS, 1997.

P. Diaconis, D. Stroock. Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains. Ann. Appl. Probab. 1 (1991), pp. 36-61.

P. W. Jones, M. Maggioni, R. Schul, Universal local parametrization via heat kernels and eigenfunctions of the Laplacian. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 35 (2010), pp. 131-174.

G. P. Leonardi. An overview on the Cheeger problem. New Trends in Shape Optimization, A. Pratelli, G. Leugering (eds), 2015, pp. 117.139.

U. von Luxburg. A tutorial on spectral clustering. Stat. Comput. 17 (2007), pp. 395-416.